Inhoudsopgave

## 1. Inleiding

Voor u ligt de scriptie die ik heb geschreven als onderdeel van het D-examen voor koperblazers. Na enig beraad heb ik ervoor gekozen om de problematiek rondom de intonatie bij samenspel tussen koperblazers en toetsenisten te behandelen.

De keuze van het onderwerp ligt voor de hand. Een D-examenkandidaat zal in zijn huidige en toekomstige muziekpraktijk ongetwijfeld met het aspect solo-spel in aanraking komen. Hierbij zal dikwijls een toetsinstrument als begeleidingsinstrument fungeren. Onvermijdelijk zullen er dan intonatie-problemen tevoorschijn komen. Het blijkt dat de intervallen op een toetsinstrument in sommige gevallen afwijken van de intervallen die de blazer speelt. De blazer heeft zich dan maar aan te passen, want bij een toetsinstrument is op het moment van uitvoering niet aan de stemming te sleutelen. Dat dit de nodige frustraties bij voornamelijk de blazer met zich mee zal brengen is dan een logisch gevolg. Het bestuderen van deze materie zal hiervoor geen pasklare oplossing (kunnen) aandragen, wel zal er meer begrip rond de problematiek ontstaan. Dit mag als een belangrijke winst worden beschouwd die de kwaliteit van het samenspel zeker ten goede zal komen.

In de scriptie zullen de begrippen *stemming* en *temperatuur* door elkaar worden gebruikt. Er wordt echter steeds hetzelfde mee bedoeld, namelijk de wijze van verdeling van de muzikale komma over de twaalf toetsen die het octaaf van een klavier telt. Het door elkaar gebruiken van deze termen is in de loop van de tijd gegroeid. Zo wordt bijvoorbeeld in combinatie met het woord *middentoon* de term *stemming* gebruikt en in combinatie met *evenredig-zwevend* meestal de benaming *temperatuur*. Van deze historisch ontstane samenvoegingen wil ik niet afwijken door consequent één van beide begrippen te kiezen en de andere te negeren.

Aan het gebruik van enige wiskunde valt niet te ontkomen bij dit onderwerp. Ik heb geprobeerd dit zo eenvoudig mogelijk te houden, zodat het geheel ook voor de niet-rekenkundig geschoolde lezer te volgen is. Als dit toch problemen oplevert, kan in alle gevallen het rekentechnische gedeelte worden overgeslagen en zonder problemen worden verder gelezen. Het waarheidsgehalte van de berekende waarden zal in dat geval zonder bewijs aangenomen moeten worden. De gebruikte muziektermen worden niet verder toegelicht, omdat ik ervan uit ga dat de lezer op de hoogte is met de betekenis daarvan.

Ik wens een ieder veel leesplezier toe en houd me graag aanbevolen voor reacties.

Urk, augustus 2007

Johannes Hakvoort
(jwhakvoort@gmail.com)

## 2. Een millennia oud probleem

Geen oplossing zonder probleem. Het is dus allereerst noodzakelijk om de problematiek waar deze scriptie over handelt weer te geven. We moeten daarvoor de muziektheorie induiken.

Zoals bekend bestaat een toon in feite uit luchttrillingen. Hoe sneller de lucht trilt, hoe hoger de toon. Het aantal trillingen per seconde noemen we de frequentie van een toon en geven we aan met de eenheid Hertz (afgekort als Hz). Het blijkt nu zo te zijn dat bij het spelen van een enkele toon, we niet één toon, maar in feite oneindig veel tonen tegelijk laten klinken. Als we bijvoorbeeld de $a^1$ spelen, horen we natuurlijk een $a^1$ (met een frequentie van 440 Hz). Deze $a^1$ noemen we nu de *grondtoon* en is ook het duidelijkst te horen. Maar tegelijk horen we ook de tonen met de frequenties van $n \times 440$ Hz. In dit geval gaat het dus om de tonen met de frequenties van $2 \times 440$ Hz = 880 Hz, $3 \times 440$ Hz = 1320 Hz, enz.[1] Deze verveelvoudiging van de frequentie waarmee we zijn begonnen gaat in principe oneindig lang door, al worden de tonen wel snel zwakker. De tonen die we extra horen boven de grondtoon noemen we *boventonen*.[2] Het volume van deze boventonen is per instrument verschillend en bepaalt voor een belangrijk deel de specifieke klankeigenschappen die bij dat instrument horen. Het gegeven dat grondtonen ook boventonen bezitten,[3] is een soort natuurwet die in de schepping is meegegeven.

Als de frequentie van een toon twee keer zo groot is als die van een andere toon, zit er precies een interval van een octaaf tussen deze beide tonen. In het hierboven gegeven voorbeeld zijn dat $a^1$ (440 Hz) en $a^2$ (880 Hz). Dit interval is in onze oren heel welluidend. De reden daartoe is duidelijk: de boventonen van de hogere toon zijn ook boventonen van de lagere toon. De frequenties 440 Hz en 880 Hz verhouden zich als 1:2.[4] Op dezelfde wijze blijken ook de tonen $a^1$ (440 Hz) en $e^2$ (660 Hz) goed bij elkaar te passen. Deze frequenties verhouden zich als 2:3 en hier hoort ons interval kwint bij. Op deze manier kunnen we doorredeneren en -rekenen en zodoende een (in principe oneindige) lijst opstellen van frequentieverhoudingen van volkomen en onvolkomen consonante[5] intervallen.[6] De eerste acht in deze lijst hebben in onze westerse muziektheorie een algemeen gebruikte benaming gekregen. Deze vermeld ik achter de frequentieverhouding.

| **frequentieverhouding** | **benaming** | **frequentieverhouding** | **benaming** |
|---|---|---|---|
| 1 : 1 | priem | 5 : 6 | kleine terts |
| 1 : 2 | octaaf | 3 : 5 | grote sext |
| 2 : 3 | kwint | 5 : 8 | kleine sext |
| 3 : 4 | kwart | 5 : 7 | |
| 4 : 5 | grote terts | 7 : 10 | |

Met de hierboven weergegeven frequentieverhoudingstabel is het nu mogelijk om de problematiek duidelijk te maken waar deze scriptie over handelt. Het blijkt namelijk dat de natuurzuivere intervallen niet sluitend met elkaar te combineren zijn. Ik illustreer dit aan de hand van een voorbeeld. Beginnen we op F, dan komen we met vier kwinten omhoog achtereenvolgens uit op $c^0$, $g^0$, $d^1$, $a^1$. Vervolgens gaan we twee octaven naar beneden. Dit geeft de tonen $a^0$ en A. Uitgaande van de begintoon hebben we dus het interval F-A gemaakt, ofwel een grote terts. Als we dit rekenkundig aanpakken met behulp van de perfect consonante intervallen zoals in bovenstaande tabel is weergegeven gebeurt het volgende: $(2:3)^4 \times (2:1)^2 = 64:81$. Dat is bijna, maar niet precies, gelijk aan de natuurzuivere grote-tertsverhouding van 4:5 = 64:80. De vijfde boventoon van de F heeft dus bijna dezelfde frequentie als de vierde boventoon van de A. Dat betekent dat er (hinderlijke) zwevingen hoorbaar zijn wanneer de tonen van dit interval tegelijk klinken.[7]

Bij het stemmen van toetsinstrumenten zal er dus gekozen moeten worden voor óf zuivere kwinten, óf zuivere tertsen, óf voor het al dan niet gelijkmatig uitsmeren van de onregelmatigheid over beide intervallen. Het ontwerpen van handige verdelingen hiertoe is iets waarmee de mensheid zich al sinds de oudheid bezighoudt.

Bij een blaasinstrument speelt deze problematiek in principe ook, alleen is de bespeler van zo'n instrument in de mogelijkheid een toon bij te sturen. Veel instrumentalisten intoneren de intervallen al dan niet bewust natuurkundig zuiver. Dat betekent dat microscopisch gezien de frequentie van enharmonisch gelijke tonen niet definitief vast ligt, maar per interval iets af kan wijken.[8] Een toetsenist is hiertoe niet in staat en is afhankelijk van de door de stemmer gelegde temperatuur[9] in zijn instrument. Hier ligt de bron van de frustraties die nog wel eens willen ontstaan bij het samenspel tussen blazer en toetsenist.

3. De oplossing van Pythagoras

De eerste (overgeleverde) documentatie over de problematiek van het handig verdelen van de onregelmatigheid over de twaalf tonen van het octaaf is afkomstig uit de oudheid. Pythagoras[10] (±570-500 v. Chr.) heeft zich hiermee beziggehouden. Deze Pythagoras stond aan het hoofd van een soort sekte die zich op een breed terrein van de wetenschap bezig hield. Hij verzamelde mensen om zich heen die een bijzondere belangstelling en aanleg tot de rekenkundige materie bezaten en liet ze na een inwijdingsperiode een gelofte af leggen de leer geheim te houden.[11] Deze leer had een mystiek karakter en bevatte naast rekenkundige aspecten ook veel ethische leerstellingen. Eén van de speerpunten van de leer was de overtuiging van Pythagoras dat alles in de kosmos in gehele getallen[12] was uit te drukken.[13]

De sekte van de Pythagoreërs heeft zich o.a. bezig gehouden met de in het voorgaande hoofdstuk uiteengezette problematiek. Dit heeft geresulteerd in een stemmingswijze die tot aan de renaissance in gebruik is geweest. Overeenkomstig hun idee dat alles in gehele getallen te vangen is (dus ook de muzikale stemmingen) is een stemmingssysteem ontworpen dat gebaseerd is op octaven, kwarten en kwinten. Er werd dus gebruik gemaakt van de verhoudingen 1:2, 2:3 en 3:4. Op deze wijze werden de tonen in het octaaf als volgt geconstrueerd:[14]

- uit $a^1$ (=1) werden de volgende tonen afgeleid:

| | | |
|---|---|---|
| $e^2$: | 1 × 2:3 = 2:3 | (kwint omhoog) |
| $e^1$: | 1 × 4:3 = 4:3 | (kwart omlaag) |
| $d^2$: | 1 × 3:4 = 3:4 | (kwart omhoog) |

- vervolgens uit $e^1$:

| | | |
|---|---|---|
| $b^1$: | 4:3 × 2:3 = 8:9 | (kwint omhoog) |

- verder werden, beginnend met $d^2$, de overige tonen één voor één van elkaar afgeleid:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $g^1$: | 3:4 × 3:2 = 9:8 | (kwint omlaag) | daaruit werd afgeleid: |
| $c^2$: | 9:8 × 3:4 = 27:32 | (kwart omhoog) | daaruit werd afgeleid: |
| $f^1$: | 27:32 × 3:2 = 81:64 | (kwint omlaag) | |

Eén van de eigenschappen van deze stemming is dat de kwinten natuurzuiver zijn.[15] Dit zou tot gevolg hebben dat de octaven niet zuiver zijn. Natuurzuivere kwinten en octaven kunnen niet binnen één en hetzelfde toonsysteem voorkomen. Immers, twaalf opeengestapelde kwinten komen in ons westerse toonsysteem overeen met zeven op elkaar gestapelde octaven. Natuurzuiver gezien is dit onmogelijk, omdat twaalf kwinten op elkaar stapelen een factor $(3:2)^{12} \approx 129{,}75$ geeft en zeven octaven een factor $(2:1)^7 = 128$. Dit sluit dus wel ongeveer, maar niet precies op elkaar aan. Na twaalf kwinten komen we hoger uit dan na zeven octaven.

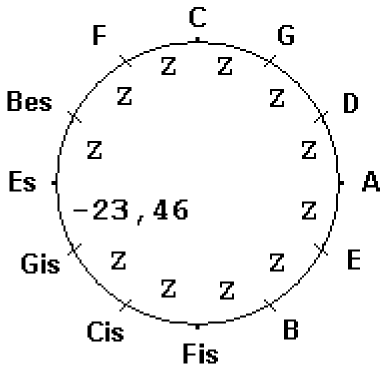
Dit bladgedeelte is bewust leeg gehouden om de leesbaarheid van de volgende pagina te bevorderen.

Om nu toch natuurzuivere octaven te verkrijgen heeft Pythagoras ervoor gekozen om één van de kwinten te klein te maken, (meestal) de kwint Gis-Es. De verhouding tussen het verschil heet de Pythagoreïsche komma en wordt (werd) in de dagelijkse praktijk de wolf genoemd.[16] De te kleine kwint heet dan ook de wolfskwint en zorgt ervoor dat alle toonsoorten waar deze kwint in voor komt onbruikbaar zijn. Vanwege deze reden waren er in de middeleeuwen in de enkele kerken die een orgel bezaten verboden toonsoorten ingesteld.

De Pythagoreïsche komma komt overeen met:

$$\frac{(3:2)^{12}}{(2:1)^{7}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288} \approx 1{,}0136.......$$

Dit komt neer op 23,46 cents,[17] dat is ongeveer een achtste toon. Eén en ander is in de kwintencirkel hieronder duidelijk af te lezen.




De Pythagoreïsche kwintencirkel. Elf kwinten zijn natuurzuiver (Z).
De kwint Gis-Es is 23,46 cents te klein.

Het ontstaan van een wolf bij de stemming van Pythagoras is echter niet het grootste probleem. Vanwege de reine kwintenstemming zijn ook de tertsen hinderlijk onzuiver. Zoals ik in hoofdstuk drie in een voorbeeld heb laten zien komt bij een opeenstapeling van kwinten de grote terts overeen met een verhouding van 64:81. Dat is niet gelijk aan de natuurzuivere grote tertsverhouding van 4:5 = 64:80. De verhouding tussen deze twee verschillende waarden wordt de *dydimische komma*[18] genoemd en komt overeen met:

$$\frac{64:80}{64:81} = 81:80$$

Dit komt neer op 21,51 cents.

Met name dit element maakt dat de Pythagoreïsche stemming ongeschikt is voor polyfoon spel en in het bijzonder voor samenspel met een koperblazer,[19] die van nature de tertsen zuiver zal intoneren.

Ondanks de tekortkomingen is de stemming van Pythagoras tot in de renaissance in gebruik geweest. Wel waren er van plaats tot plaats en van tijd tot tijd kleine onderlinge verschillen.[20]

4. De middentoonstemming als oplossing voor vroeg-polyfonisch gebruik

Zoals hiervoor beschreven is de stemming van Pythagoras vanaf de oudheid letterlijk de toonaangevende stemming geweest. Pas in de late middeleeuwen begon de vraag bij musici om een betere, meer praktische, stemmingswijze toe te nemen. Dit heeft rechtstreeks te maken met het ontstaan en uitbreiden van de polyfone muziek in de late middeleeuwen en vroege renaissance. Pas in deze tijd werd het gebruik van grote tertsen in de muziek gemeengoed en juist deze grote terts is onbruikbaar bij een Pythagoras-stemming. Deze onbruikbaarheid bracht de middeleeuwse muziektheoreticus ertoe om de grote terts als een vals interval te beschouwen en het gebruik ervan af te keuren. De musici echter ontdekten al snel dat met natuurzuiver[21] geïntoneerde grote tertsen wel degelijk welklinkende samenklanken geproduceerd konden worden. Het spreekt voor zich dat men deze samenklanken dus ook wilde gaan gebruiken en daarom voldeed de stemming van Pythagoras niet langer meer. Er werd gezocht naar een compromis, waarin zowel kwinten, als tertsen, als (vanzelfsprekend) octaven goed bruikbaar waren. Dit compromis werd uiteindelijk gevonden en staat bekend als de *middentoonstemming*. Een belangrijke naam in de ontwikkeling hiertoe is Gioseffo Zarlino da Chioggia (1517-1590).[22] Naast middentoonstemming zou daarom de benaming Chioggia-stemming gerechtvaardigd zijn, maar dit is niet gebruikelijk.

De stemming is gebaseerd op het idee om de dydimische komma in gelijke mate uit te smeren over de overige kwinten, en wel op zo'n wijze dat vier opeengestapelde kwinten precies een natuurzuivere grote terts opleveren. De komma moet dus in vier gelijke stukken worden verdeeld. Vervolgens wordt iedere zuivere kwint met deze afstand verminderd. Nadeel is dat er nu weliswaar natuurzuivere grote tertsen ontstaan, maar dat de kwinten niet meer zuiver zijn. De onzuiverheid van deze kwinten is als volgt te berekenen:

$$\sqrt[4]{\text{dydimische komma}} \;=\; \sqrt[4]{81:80} \;\approx\; 1{,}0031.........$$

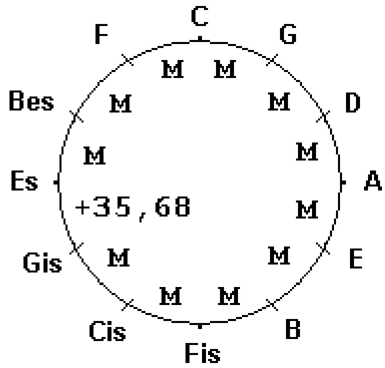
Dit komt neer op 5,38 cents.

Deze onzuiverheid is echter, vanwege de vier keer zo kleine correctie, veel minder hinderlijk dan de totaal onbruikbare grote tertsen bij de zuivere kwintenrij van Pythagoras.

De naam middentoonstemming komt voort uit de manier waarop deze stemming wordt gerealiseerd. Eerst worden via zuivere kwinten en octaven in volgorde de volgende tonen gestemd: $f^1 - c^2 - c^1 - g^1 - d^2$. Vervolgens wordt via een zuivere grote terts vanaf $f^1$ de toon $a^1$ gestemd. Met behulp van zuivere octaven worden de tonen $f^0$ en $a^2$ hieruit verkregen. Er zijn nu vier natuurzuivere kwinten: $f^0$-$c^1$, $c^1$-$g^1$, $g^1$-$d^2$ en $d^2$-$a^2$.[23] In de volgende stap worden deze vier kwinten allemaal zoveel verkleind, dat de toon $g^1$ (de middentoon) precies tussen de $f^1$ en de $a^1$ terecht komt. Via zuivere grote tertsen kunnen daarna de andere tonen worden verkregen.

De op deze wijze verkregen middentoonstemming lijkt nu een ideale vervanger te zijn van de stemming van Pythagoras. Immers, er zijn zuivere grote tertsen en iets onzuivere, maar wel bruikbare, kwinten. Toch doet zich nu nog een belangrijk probleem voor dat niet genegeerd kan worden. De octaven wijken sterk af van de natuurzuivere octaven. Immers, vier gestapelde middentoonskwinten vormen samen twee octaven en een grote terts. Hier hoort een verhouding bij van 1:5. Een opeenstapeling van twaalf middentoonskwinten levert dus een verhouding op van $(1:5)^3 = 1:125$. Dat is minder dan de zeven octaven waarmee de twaalf kwinten overeen zouden moeten komen, immers $(1:2)^7 = 1:128$.[24] Dit verschil wordt, net als bij de stemming van Pythagoras, gecompenseerd door één kwint te veranderen. In de middentoonstemming is dat, evenals bij Pythagoras, meestal de kwint Gis-Es.[25] Ook hier wordt de benaming wolfskwint gebruikt. De middentoonwolf komt overeen met 35,68 cents,[26] dat is zelfs nog groter dan de Pythagoraswolf, maar de toonsoorten waar deze in voorkomt konden bij Pythagoras ook al niet gebruikt worden.[27]

Eén en ander is met behulp van een kwintencirkel hieronder gevisualiseerd.




De kwintencirkel van de middentoonstemming. Elf kwinten zijn 5,38 cents te klein (M).
De kwint Gis-Es is 35,68 cents te groot.

Ondanks de dus nog steeds aanwezige wolf[28] kent de middentoonsteming belangrijke voordelen. De toonsoorten die wél mogelijk zijn klinken, vanwege de natuurzuivere grote tertsen, prachtig rein en zijn dan ook zeer geschikt om een koperblazer te begeleiden. De maar iets te kleine kwinten doen daar niet veel aan af. Daarentegen bestaan er ook toonsoorten die absoluut onbruikbaar zijn, maar dat was bij de stemming van Pythagoras ook het geval. Verder heeft iedere toonsoort een heel eigen karakter.[29] Dit gegeven werd door componisten uit de late renaissance en barok veelvuldig gebruikt, door in hun koraalbewerkingen een toonsoort te kiezen die goed past bij de tekstuele inhoud van dat koraal.[30] Deze muziek wordt met de verderop nog te behandelen evenredig-zwevende temperatuur ernstig tekort gedaan.

In ons land staan, voor zover mij bekend, nog een paar orgels (weer) in middentoon: Alkmaar (Laurenskerk, kleine orgel), Amsterdam (Oude Kerk, kleine orgel), Dronrijp (Herv. kerk), Eenum (Herv. kerk), Egmond-binnen (Herv. kerk), Haarlem (Bavokerk, kleine orgel), Hattem (Andreaskerk, kleine orgel), Hoog-Keppel (Oude kerk), Kantens (Herv. kerk), Krewerd (Herv. kerk), Leiden (Pieterskerk, grote orgel), Nijmegen (Stevenskerk, kleine orgel), Oosthuizen (Grote kerk), Schijf (Antoniuskerk) en Zeerijp (Jacobuskerk).[31] Verder staan de meeste carillons in midentoonstemming. Daarnaast worden oude toetsinstrumenten als klavecimbel, spinet etc. bij gelegenheid nog wel eens in middentoon gestemd.

5. Korte beschouwing op drie latere ongelijk-zwevende temperaturen

De latere barok kan gezien worden als de tijd waarin de harmonie een grote plaats in gaat nemen in de westerse muziek. Deze ontwikkeling gaat gepaard met het ontwerpen van diverse stemmingswijzen. Alhoewel tussen de verschillende 'oplossingen' (met elk hun eigen nadelen) soms grote verschillen voorkomen, wordt steeds hetzelfde doel nagestreefd: zo rein mogelijk klinkende tertsen en kwinten, zuivere octaven en geen wolf. Dit zijn tegenstrijdige belangen, dus moest er, net als bij de al besproken stemmingswijzen, water bij de wijn worden gedaan.[32] Rond 1680 worden de eerste proeven met varianten op de 1/4e komma middentoonstemming gedaan, hetgeen resulteert in o.a. de onder noot 27 genoemde modificaties op deze stemming. Uiteindelijk voldoen de modificaties niet; de wolfskwint blijft onbruikbaar. De zoektocht naar alternatieve temperaturen waarbij zoveel mogelijk toonsoorten gebruikt kunnen worden wordt daarom voortgezet[33] en bereikt rond 1750-1800 zijn hoogtepunt. In deze tijd zijn tientallen temperaturen ontstaan, die vaak van plaats tot plaats verschillen.[34] De meeste van deze temperaturen worden tegenwoordig niet meer gebruikt, of zijn zelfs niet eens overgeleverd. Op deze plaats wil ik drie belangrijke ongelijk-zwevende stemmingen kort toelichten die rond die tijd tot stand zijn gekomen en tegenwoordig nog sporadisch worden toegepast.[35]

1. *Weckmeister III (1691)*[36]

Deze stemming, ontworpen door de Duitse organist en theoreticus Andreas Werckmeister (1645-1706), wordt gekenmerkt door vier kwinten die (iets) te klein zijn gestemd. Dit zijn de kwinten C-G, G-D, D-A en B-Fis, de andere kwinten zijn (nagenoeg) zuiver. Het grote voordeel van deze stemming is dat er geen expliciete wolfskwint meer in voorkomt. Dit heeft tot gevolg dat in principe alle toonsoorten kunnen worden gespeeld, al klinken de toonsoorten met weinig voortekens zuiverder dan de toonsoorten met meer voortekens. Iedere toonsoort heeft een eigen karakter, al is dit wel minder nadrukkelijk aanwezig dan bijvoorbeeld in de middentoonstemming.

*2. Valotti (1779)*[37]

Zuivere kwinten zijn Es-Ais, Bes-F, B-Fis, Fis-Cis, Cis-Gis en Gis-Dis. De overige kwinten zijn verkleind.[38] Ook in deze stemming komt (evenals de stemming hieronder) geen wolfskwint meer voor.

*3. Kirnberger III (1779)*[39]

Zuivere kwinten zijn Es-Ais, Bes-F, F-C, E-B, B-Fis, Cis-Gis en Gis-Dis. Middentoonkwinten zijn C-G, G-D, D-A en A-E. De kwint Fis-Cis is een evenredig-zwevende kwint.[40] Samen is dit een nagenoeg gesloten kwintencirkel. Het verschil is minder dan 0,002 cents.

De hierboven besproken (en andere) stemmingswijzen kunnen min of meer als voorlopers naar de tegenwoordig veelvuldig gebruikte en hierna te behandelen *evenredig-zwevende temperatuur* worden gezien.

## 6. De evenredig-zwevende[41] temperatuur als moderne winnaar

De hiervoor genoemde stemmingswijzen blijven echter het probleem houden dat er toonsoorten voorkomen die in meer of mindere mate niet goed klinken. Toen componisten en musici steeds meer behoefte kregen om ‘vreemde’ toonsoorten te gebruiken, voldeden de tot dan toe gebruikelijke stemmingswijzen niet meer. Daarom werd langzamerhand een oplossing ingevoerd die al eeuwen bekend was, maar vanwege artistieke gronden (terecht) tot dan toe was verworpen. Het idee erachter ligt voor de hand: het octaaf van een toetsinstrument wordt in twaalf even grote stukken verdeeld. Dit heeft tot gevolg dat ieder interval evenredig afwijkt van ieder ander interval.[42]

De verhouding van een kleine secunde wordt hierdoor $\sqrt[12]{2:1}$. Dit komt overeen met 100 cents.[43] De grootte in cents van een evenredig-zwevend interval is dus gemakkelijk te berekenen door het aantal halve tonen waaruit dit interval bestaat te vermenigvuldigen met 100.

Het verschil in cents tussen een evenredig-zwevende en een natuurzuivere kwint bedraagt:[44]

$$700 - 1200 \cdot {}^{2}\log(3:2) \approx -1{,}96$$

Dit wijkt aanvaardbaar af.

Anders wordt het bij de belangrijke grote terts:

$$400 - 1200 \cdot {}^{2}\log(4:5) \approx 13{,}96$$

Het verschil van bijna veertien cents is in principe onaanvaardbaar groot, maar is toch geaccepteerd om het musiceren in alle toonaarden mogelijk te maken.

Hieronder heb ik, op dezelfde wijze als hierboven, de afwijking in cents per interval[45] berekend van de evenredig-zwevende stemming.

| **interval** | **verh.** | **ntrzvr** | **glkzw.** | **afwijking** | **interval** | **verh.** | **ntrzvr** | **glkzw.** | **afwijking** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| r. priem | 1:1 | 0,00 | 0 | 0,00 | r. kwint | 2:3 | 701,96 | 700 | -1,96 |
| kl. sec. | 15:16 | 111,73 | 100 | -11,73 | kl. sext | 5:8 | 813,69 | 800 | -13,69 |
| gr. sec. | 8:9 | 203,91 | 200 | -3,91 | gr. sext | 3:5 | 884,36 | 900 | +15,64 |
| kl. terts | 5:6 | 315,64 | 300 | -15,64 | kl. septm | 9:16 | 996,09 | 1000 | +3,91 |
| gr. terts | 4:5 | 386,31 | 400 | +13,69 | gr. septm | 8:15 | 1088,27 | 1100 | +11,73 |
| r. kwart | 3:4 | 498,04 | 500 | +1,96 | r. octaaf | 1:2 | 1200,00 | 1200 | 0,00 |
| o. kwart | 5:7 | 582,51 | 600 | +17,49 | | | | | |

Als een koperblazer samenspeelt met een begeleidend toetsinstrument heeft deze muzikant tegen wil en dank met de evenredig-zwevende stemming te maken.[46] Dat een (automatisch natuurzuiver intonerende) muzikant dan hindernissen ondervindt met deze stemming is niet te voorkomen. Met name de beide tertsen en hun omkeringen, de beide sexten, zullen hinderlijke zwevingen vertonen. De blazer zal dit moeten compenseren, hetzij via lipspanning, hetzij via een triggermechaniek, of de zwevingen moeten accepteren.

7. Bezwaren tegen de evenredig-zwevende temperatuur

Hoewel de evenredig-zwevende temperatuur onmiskenbaar bepaalde voordelen biedt, zijn enkele belangrijke bezwaren tegen deze stemming in te brengen.

- Voor muzikanten die begeleid worden door een evenredig-zwevend gestemd instrument is er geen enkele écht goed klinkende toonsoort te vinden. Bij bijvoorbeeld middentoonstemming is het aantal bruikbare toonsoorten dan wel beperkt, maar deze toonsoorten klinken heel rein, zeker als ze vergeleken worden met de evenredig-zwevende temperatuur.

- Ieder toonsoort heeft hetzelfde karakter, maar klinkt alleen hoger of lager naar gelang de keuze van het tonale centrum. Hierdoor komt veel oude(re) muziek niet meer tot zijn recht, omdat bij het schrijven van deze muziek juist gebruik is gemaakt van de verschillende karakters die de toonsoorten in ongelijk-zwevende stemmingen bezitten.

- Ook als een toetsenist zonder solist speelt, zal hij bij het gelijktijdig laten klinken van intervallen zwevingen opmerken.

- Hoewel de kwarten, kwinten en octaven door de evenredig-zwevende temperatuur redelijk goed benaderd worden, gaat het bij de tertsen, die juist een belangrijke bouwsteen zijn in de harmonie, grondig mis.

## 8. Slotwoord

Ik begon bij de probleemstelling in hoofdstuk drie met de opmerking *geen oplossing zonder probleem.* Dat dit een logisch feit is zal voor de lezer duidelijk zijn. Helaas blijkt het omgekeerde, *geen probleem zonder oplossing*, niet waar te zijn. Een échte oplossing voor de problematiek bestaat op deze aarde niet. De tegenwoordig meestal gebruikte evenredig-zwevende temperatuur heeft belangrijke nadelen, zoals ik in de hoofdstukken zeven en acht heb laten zien, doch ook de andere besproken stemmingen zijn niet altijd ideaal. Steeds botsen weer enerzijds de wens om in zoveel mogelijk toonsoorten te kunnen spelen en anderzijds de wens om iedere toonsoort zo zuiver mogelijk te laten klinken.

Het bleek tijdens het schrijven van deze scriptie ook moeilijk om grenzen te trekken. De materie kan veel uitgebreider beschreven worden dan hier is gebeurd. Soms was die wens ook aanwezig, maar de bedoeling en de context van de scriptie moeten niet uit het oog worden verloren. In de inleiding schreef ik hierover:

*De blazer heeft zich dan maar aan te passen, want bij een toetsinstrument is op het moment van uitvoering niet aan de stemming te sleutelen. Dat dit de nodige frustraties bij voornamelijk de blazer met zich mee zal brengen is dan een logisch gevolg. Het bestuderen van deze materie zal hiervoor geen pasklare oplossing (kunnen) aandragen, wel zal er meer begrip rond de problematiek ontstaan.*

Als bij de rein-intonerende koperblazer dit begrip tot zijn aan toetsen gebonden mede-muzikant is ontstaan, is de opzet van deze scriptie geslaagd.

Hoewel een pasklare oplossing niet is aan te dragen voor de stemmingsproblematiek, gaat mijn eigen voorkeur voor samenspel tussen toetsenist en instrumentalist uit naar een (al dan niet gemodificeerde) middentoonstemming. Hoewel de blazer vaker dan de toetsenist zal moeten transponeren, zal het uiteindelijke resultaat voor beide musici bevredigender zijn dan bij een evenredig-zwevend gestemd instrument.

9. Bijlagen

## I. Exacte berekening van de middentoonwolf

In de literatuur worden diverse waarden voor de middentoonwolf genoemd. Meestal komen de afwijkingen voort uit onnauwkeurigheid die ontstaat bij het afronden van tussentijdse antwoorden. Om ruis over de precieze waarde te voorkomen neem ik hieronder een exacte berekening op van deze wolf, waarin niet tussentijds is afgerond.

De verhouding van de middentoonkwint komt overeen met de verhouding tussen een natuurzuivere kwint en het vierde deel van de dydimische komma:

$$\frac{3:2}{\sqrt[4]{81:80}}$$

Een volledige rondgang om de kwintencirkel betekent een opeenstapeling van zeven octaven of twaalf kwinten.

- De stapeling van zeven natuurzuivere octaven levert de volgende verhouding op:

$$(2:1)^7 = 128:1 = 128$$

- De stapeling van elf middentoonskwinten geeft de verhouding:

$$\left(\frac{3:2}{\sqrt[4]{81:80}}\right)^{11}$$

De verhouding van de overblijvende kwint, de wolfskwint, komt nu overeen met:

$$\frac{128}{\left(\frac{3:2}{\sqrt[4]{81:80}}\right)^{11}}$$

De wolf zelf heeft dus, uitgedrukt in cents, de waarde:

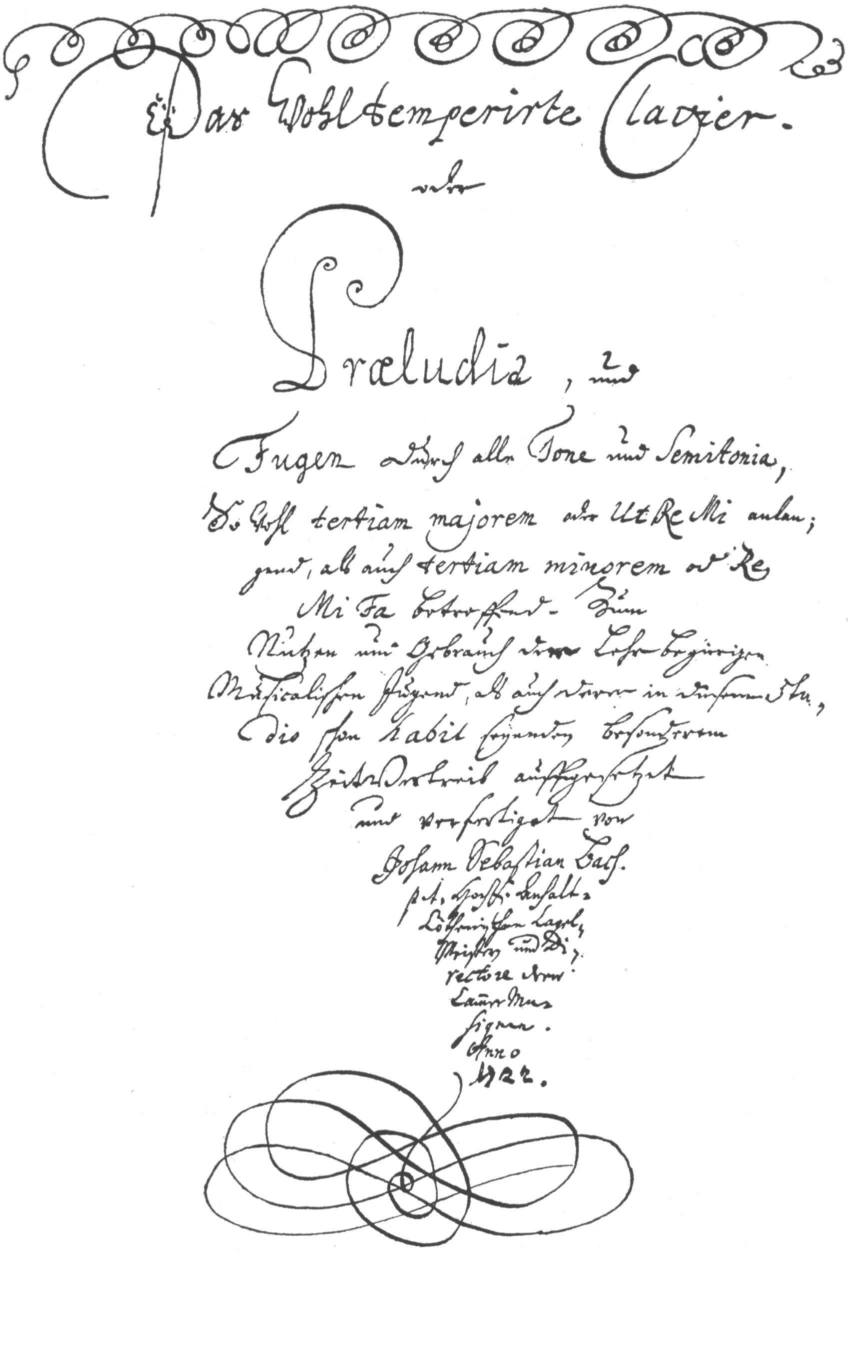
$$1200 \cdot \left\{ {}^{2}\log\left[\frac{128}{\left(\frac{3:2}{\sqrt[4]{81:80}}\right)^{11}}\right] - {}^{2}\log(3:2) \right\} \approx 35{,}6823.........$$

## II. De “Das Wohl-temperierte Clavier-temperatuur”

Bij het onderzoek naar de materie voor deze scriptie ben ik een meer curieus dan wetenschappelijk artikeltje tegengekomen. Omdat dit soort ‘ontdekkingen’ een nogal hoog Da Vinci Code-gehalte hebben, heb ik het niet op willen nemen in de scriptie zelf. Bovendien raakt het niet helemaal aan het onderwerp, dat alleen de problematiek en enkele bestaande stemmingen wil bespreken. Het is echter interessant genoeg om toch eens door te lezen. Ik neem het hieronder in verkorte en iets (taalkundig) aangepaste vorm over. Ernaast is een afbeelding van de bewuste titelpagina geplaatst. De lezer oordele zelf.

***De ontdekking van Bachs intonatie***

*En midden in de heropleving van de strijd om de stemmingen vindt ene Lehman ineens een aanwijzing over de manier van stemmen zoals Bach het bedoelde. Hij publiceerde jongstleden mei 2005 een artikel in een Amerikaans tijdschrift over oude muziek, over een krabbel op het beroemde werk: Das Wohl-temperierte Clavier. Op de titelpagina van het handschrift van Bach, staat bovenaan een krullende versiering. Helemaal links staat een C als markering. Lehman beweert dat je deze krul van rechts naar links moet lezen. Je ziet elf lussen, vijf daarvan hebben twee binnenlussen, dan heb je er drie zonder binnenlussen, en vervolgens drie met één binnenlus. Lus nummer twaalf is verder niet ontwikkeld. Lehman ziet in de krul aanwijzingen in welke mate de kwinten moeten worden ontspannen. Dat levert drie verschillende kwinten op. De eerste vijf zijn als in een Silbermann middentoonstemming, dan zijn er drie rein als in de Pythagorese stemming en de laatse vier zijn als in de evenredig-zwevende stemming. Dat levert een onregelmatige temperatuur op die anders is dan Werckmeister en Kirnberger. Het is een milde stemming met milde karakters in de toonaarden.*



10. Noten

**1.** Dit zijn respectievelijk de tonen $a^2$ en $e^3$. Hogere boventonen zitten regelmatig tussen twee tonen in en hebben dan niet een eigen naam, maar alleen een frequentie- of ordeaanduiding.

**2.** Dit is de natuurkundige aanduiding en de meest gebruikte. Wiskundigen noemen echter de grondtoon de eerste boventoon, zodat ten opzichte van de natuurkundige notatie de benaming een toon ‘naar links’ verschuift. Bij bestudering van onderwerpen die met deze materie te maken hebben is het belangrijk om eerst na te gaan welke notatie gehanteerd wordt. In deze scriptie zal ik verder de wiskundige notatie aanhouden, omdat deze diverse rekenkundige voordelen heeft.

**3.** Met een eenvoudige proef op een (goede) piano is aan te tonen dat boventonen inderdaad bestaan. Druk zacht de laagste toets F in, op zo’n manier dat de hamer niet tegen de snaar slaat en er dus geen toon klinkt. Houd deze toets ingedrukt. De demper is nu van de snaar afgehaald, zodat deze vrij kan trillen. Sla het grote tertsakkoord $f^0$-$a^0$-$c^1$ staccatissimo aan. In de ene lage F-snaar horen we nu het akkoord zacht doorklinken, terwijl de snaren van het aangeslagen akkoord zelf niet kunnen klinken, omdat de bijbehorende snaren alweer gedempt zijn. Dit is alleen maar mogelijk, omdat de grondtonen van deze drie toetsen tegelijk ook boventonen zijn van de laagste F-toets. De snaar neemt deze boventonen over en laat ze tegelijk klinken.

**4.** Deze frequentieverhouding staat in direct verband met de mechanische eigenschappen van het geluidvoortbrengende instrument. Als een gespannen snaar in de verhouding 1:2 wordt verdeeld, blijken de beide delen een interval van een octaaf te verschillen. Hetzelfde doet zich ook voor bij twee orgelpijpen, waarbij de ene twee keer zo lang is als de andere. Evenzo geldt dit voor de hierna nog te noemen andere frequentieverhoudingen.

**5.** Alleen de consonante intervallen uit deze lijst hebben in de loop van de tijd een (algemeen aanvaarde) naam gekregen. Dat het begrip ‘consonant’ enigszins subjectief is blijkt uit een citaat van Christiaan Huygens (1629-1695), die veel onderzoek op muziektheoretisch terrein heeft verricht: *Nu zeg ik dat de intervallen van 7 tot 5 en 10 tot 7 iets harmonieus hebben, als men ze aandachtig keurt (althans zo bevind ik het met mijn oor) en dat men ze onder de consonanten zou kunnen rekenen, wat ook de meesters componisten daarvan willen zeggen, die ze integendeel onder de valse betrekkingen rangschikken*.

**6.** Deze verhoudingen zijn equivalent met de bij blazers bekende natuurtoonreeks. Het octaaf bevindt zich bijvoorbeeld tussen de eerste en tweede natuurtoon en heeft derhalve de verhouding 1:2. Evenzo bevindt zich de kwint tussen de tweede en derde natuurtoon, waar dan ook de verhouding 2:3 bij hoort.

**7.** De luidheid van deze zwevingen zijn per instrument verschillend. Bij het orgel, dat relatief boventoonrijk is, gaat het hier om een serieus probleem, zoals ook in het vervolg nog zal blijken. Bij een piano is dit iets minder, omdat dit instrument minder (luide) boventonen produceert i.v.h. tot het orgel.

**8.** We komen hier op het terrein van enharmonisch gelijke tonen. Op een toetsinstrument is bijvoorbeeld een Ais dezelfde toon als een Bes, maar zuiver natuurkundig gezien is dit onjuist.

**9.** Of: stemming. Zie ook de inleiding.

**10.** Inderdaad dezelfde Pythagoras als de man achter de bekende stelling van de middelbare school.

**11.** Door deze geheimhoudingsplicht zijn helaas veel ontdekkingen en theorieën verloren gegaan.

**12.** Hij liet naast gehele getallen ook de rationale getallen (breuken) toe, die immers zijn samen te stellen m.b.v. gehele getallen in de teller en de noemer.

**13.** Dat dit een onjuiste leerstelling is, heeft Pythagoras zelf nog ontdekt m.b.v. zijn eigen beroemde stelling. Nemen we bijvoorbeeld een rechthoekige driehoek met beide rechthoekszijden lengte 1, dan heeft de schuine zijde lengte $\sqrt{2}$. Het getal $\sqrt{2}$ is niet als breuk uit te drukken, en dus irrationaal.

**14.** Als 'grondtoon' werd $a^1$ gebruikt.

**15.** Deze keuze heeft samengehangen met de magische krachten die de sekte aan het getal vijf toeschreef. Het symbool van de sekte was dan ook een pentagram dat als geheim teken in de huid van de ingewijdenen was getatoeëerd.

**16.** Deze benaming komt voort uit het huilende effect van het bijbehorende interval.

**17.** De cent is een logaritmische schaal om frequentieverhoudingen om te zetten in gemakkelijker te hanteren toonsafstanden en is rond 1870 ingevoerd door Alexander Ellis. Een natuurzuiver octaaf (verhouding 1:2) komt overeen met 1200 cent. Bij het omrekenen van frequentieverhoudingen naar cents kan gebruik gemaakt worden van onderstaande formule, waarbij $f_1$ en $f_2$ de beide componenten van de toonverhouding vormen.

$$\text{waarde in cents} = 1200 \cdot {}^2\log\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$$

**18.** Dit wordt ook wel als *syntonische komma* aangeduid.

**19.** Vanuit de context van deze scriptie spreek ik steeds over 'koperblazer'. Uiteraard gelden de intonatieproblemen voor alle solerende musici die begeleid worden door een toetsinstrument.

**20.** Er werd door instrumentenbouwers bijvoorbeeld gevarieerd in de keuze voor de kwint waar de wolf in werd gelegd. Ook werd in plaats van $a^1$ als grondtoon ook wel een andere grondtoon gekozen, in het bijzonder $c^1$. Ook kwamen verschillen voor die terug waren te voeren op de deskundigheid van de stemmer.

**21.** Dat is dus in de verhouding 4:5.

**22.** Kapelmeester in Venetië en auteur van diverse muziektheoretische boeken. Onder zijn invloed werd definitief gebroken met de valse tertsen die de stemming van Pythagoras oplevert.

**23.** De keuze om niet direct te beginnen bij $f^0$ vloeit voort uit het opstapelen van onnauwkeurigheden. Hoe goed er ook gestemd wordt, een zekere marge zal altijd blijven bestaan. Als begonnen wordt bij $f^0$, kan bij de eindpunten $d^2$ en $a^2$ deze marge een aantal keren bij elkaar opgeteld hoorbare afwijkingen opleveren.

**24.** Dit heeft tot bijzonder gevolg dat de theoretische Cis juist lager klinkt dan de Des!

**25.** Bij de middentoonstemming wordt de wolfskwint groter wordt gemaakt, terwijl deze bij Pythagoras juist moet worden verkleind.

**26.** In diverse publicaties ben ik verschillende waarden voor de middentoonwolf tegengekomen. De afwijkingen waren soms het gevolg van fouten, maar kwamen meestal voort uit het afronden van tussenantwoorden. Om ruis over de precieze waarde te voorkomen heb ik in de bijlage een exacte berekening van deze middentoonwolf opgenomen, waarin niet tussentijds is afgerond.

**27.** Op een enkele uitzondering na, zoals hierna zal blijken (noot 30).

**28.** Er bestaan enkele varianten op de middentoonstemming. De in deze scriptie behandelde variant is de 1/4^e komma middentoonstemming. De benaming zal duidelijk zijn, de komma is over vier kwinten uitgesmeerd. Naast deze hoofdvariant bestaat er bijvoorbeeld de 1/5^e en 1/6^e komma middentoonstemming, waarin elf kwinten respectievelijk 1/5^e en 1/6^e komma zijn verkleind. Het resultaat levert iets minder reine tertsen, iets reinere kwinten en een kleinere wolf op. Deze wolf blijft echter nagenoeg onbruikbaar.

**29.** Dit geldt overigens in meer of mindere mate voor alle ongelijk-zwevende stemmingen.

**30.** Zelfs de wolf wordt in deze muziek gebruikt. In passages waar bijvoorbeeld het lijden van Christus wordt bezongen wordt deze nog wel eens toegepast.

**31.** Hier zijn alleen de instrumenten die in 1/4^e komma (‘echte’) middentoon staan genoemd. Voor aanvullingen of verbeteringen van deze lijst houd ik me graag aanbevolen.

**32.** Voor zover ik heb kunnen nagaan werden de octaven altijd wel zuiver gestemd.

**33.** Het waren vooral orgelbouwers en organisten die zich met deze materie bezighielden. Andere toetsinstrumenten uit die tijd, zoals het spinet, klavecimbel of klavechord, konden relatief eenvoudig door de bespeler zelf worden gestemd. Meestal werd voorafgaand aan een uitvoering de stemming van deze instrumenten dan ook eenvoudigweg aangepast aan de te spelen toonsoorten.

**34.** Dit leverde voor componisten die hun muziek wilden uitgeven veel hoofdbrekens op, omdat de muziek niet altijd compatibel was met het instrument waarop het eventueel kon worden uitgevoerd.

**35.** De namen van deze stemmingswijzen zijn ontleend aan hun ontwerpers.

**36.** Deze stemming komt op dit moment bijvoorbeeld voor in het Bosch-orgel uit 1686 in de Grote kerk in Vollenhove.

**37.** Een voorbeeld van deze stemming is te vinden in het Schnitger-orgel uit 1700 in de Hervormde kerk in Uithuizen.

**38.** Deze verkleinde kwinten zijn echter zuiverder dan de verkleinde kwinten bij de stemming van Werckmeister III (698 cents tegen 696,6 cents).

**39.** Een voorbeeld is het Ruprecht-orgel uit 1715 in de Tuindorpkerk in Utrecht.

**40.** De betekenis van de term *evenredig-zwevende kwinten* zal in het hiernavolgende hoofdstuk duidelijk worden.

**41.** Ook wordt de benaming *gelijk-zwevend* vaak gebruikt. De termen *evenredig-zwevend* en *gelijk-zwevend* hebben dezelfde betekenis.

**42.** Het octaaf is wel natuurzuiver.

**43.** De mooie getallen die de cents-schaal oplevert bij het rekenen aan de evenredig-zwevende temperatuur, zijn het gevolg van het feit dat de schaal is ontworpen voor gebruik bij deze stemming. 100 cents komen overeen met een evenredig-zwevende halve toon.

**44.** De negatieve waarde betekent dat de evenredig-zwevende kwint te klein is. Evenzo betekent een positieve waarde een te groot interval.

**45.** De verhoudingen van de dissonante intervallen kunnen op dezelfde wijze uit de natuurtoonreeks worden afgeleid als is verwoord in noot zes. Ook zijn deze verhoudingen te berekenen met behulp van de volkomen en onvolkomen consonanten. Een grote secunde kan bijvoorbeeld worden samengesteld door twee reine kwinten te stapelen en vervolgens een rein octaaf naar beneden te gaan. Er gebeurt nu het volgende: $(2:3)^2 \times 2:1 = 8:9$. De lijst is niet compleet, maar toont enkele veel gebruikte intervallen. Voor een rein-intonerend muzikant is een overmatige kwint immers een ander interval dan een kleine sext, terwijl hierbij voor een toetsenist geen verschil bestaat.

**46.** Ervan uitgaande dat dit begeleidend toetsinstrument in de evenredig-zwevende temperatuur staat. Dat is bij veel hedendaagse orgels en vrijwel alle piano's het geval.

## 11. Verantwoording

Geraadpleegde literatuur:


- A. Bouman, *Nederland… Orgelland*, 3e druk, Spruyt, v Mantgem & d Does NV (Leiden, 1964).

- L.N.H. Bunt, *Van Ahmes tot Euclides, hoofdstukken uit de geschiedenis van de wiskunde*, J.B. Wolters (Groningen, 1959).

- J. v/d Craats, *De juiste toon,* Epsilon Uitgaven (Utrecht, 2003).

- J.W. Hakvoort, *Vals spel voert de boventoon*, artikel verschenen in 'de Opmaat', verenigingsblad van Brassband Valerius (Urk, 2006).

- M.J. Lürsen, *Grondslagen van de muziekt(h)eorie,* 8e druk, Servire (Katwijk, 1978).

- F. Takens en J. v/d Craats, *De juiste toon, de juiste stemming*, artikel verschenen in 'Nieuw archief voor wiskunde', periodieke uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, 5e jaargang, nr. 2 (Leiden, 2001).

- J. Wilbers, *Syllabus algemene muziekleer, versie schooljaar 1995-1996*, Conservatorium Hogeschool Enschede (Enschede, 1995).

- Internet: website van de stichting Huygens-Fokker: http://www.xs4all.nl/~huygensf/index.html.


Voor de typografische opmaak is gebruik gemaakt van de LINUX-OpenOffice omgeving.
De afbeelding op de titelpagina is vervaardigd door Huib Suurmond: http://www.huibsuurmond.nl.